**Марковские процессы с непрерывным временем и конечным/счетным множеством состояний**

**Общие определения**

Вспомним некоторые определения, необходимые для вероятностного описания марковских скачкообразных процессов.

Пусть – полное вероятностное пространство, а – неубывающее семейство (*поток*) -подалгебр алгебры : , являющееся непрерывным справа, т.е.

**Определение 1**. Случайный процесс называется  *– согласованным*, если случайная величина является – измеримой.

Без ограничения общности будем считать, что

**Определение 2**. Случайный процесс называется *марковским* относительно потока , если для выполняется равенство

**Замечание 1**. Условие марковости (1) может быть записано в эквивалентной форме: верно равенство

Возможен также такой вариант: и любой ограниченной борелевской функции *g=g(x)* выполняется равенство

Рассмотрим следующую условную вероятность: . Заметим, что последнее равенство выполняется в силу марковского свойства процесса .

**Определение 3**. Функция называется *переходной функцией марковского процесса* (или *стохастическим ядром процесса*), если она удовлетворяет следующим условиям

1. определяет вероятностное распределение на ( по при любых фиксированных *(s,x,t)* таких, что .
2. измерима по *x* при любых фиксированных таких, что .
3. при любых и является решением *уравнения Колмогорова-Чепмена*

с начальным условием

Переходная функция процесса совместно с распределением его начального условия позволяет полностью определить распределение данного процесса: для выполняется равенство

**Определение 3**. Марковский процесс называется *однородным*, если как функция *(s,t)* зависит лишь от разности *t - s*:

**Матрица интенсивности переходов. Уравнения Колмогорова**

В дальнейшем, если особо не оговорено, мы будем рассматривать однородные марковские процессы.

В случае, если множество состояний марковского процесса является счетным, например , уравнение Колмогорова-Чепмена приобретает более простой вид (ниже используется обозначение ):

или, в матричной форме

*P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t). (3’’)*

Уравнение (3’’) относится к классу *функциональных* уравнений, решение которых в общем случае затруднительно. Ограничим класс рассматриваемых однородных марковских процессов таким образом, чтобы решение функционального уравнения сводилось к более простому виду, например, к решению системы дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать только *стохастически непрерывные* (т.е. непрерывные по вероятности: ) марковские процессы.

**Пример 1 (для самостоятельного решения)**. Доказать, что в случае однородных марковских процессов с конечным/счетным множеством состояний стохастическая непрерывность эквивалентна непрерывности функции *P(t)*:

Будем также считать для простоты, что непрерывность *P(t)* является равномерной. Пусть – т.н. *функция дожития*, вероятность того, что первый выход из состояния произойдет позднее .

**Теорема 1**. Если – однородный стохастически непрерывный (сепарабельный) марковский процесс, то имеет вид

где ; кроме того, если , то Существуют

**Доказательство:**

В силу марковского свойства причем функция в силу стохастической непрерывности процесса является непрерывной и, исходя из определения, невозрастающей. Тогда (известный факт из теории функциональных уравнений) у последнего уравнения существует единственное решение вида (4), где , так как , и , так как при

Построим разбиение События несовместны, поэтому по формуле полной вероятности

Из непрерывности *P(t)* следует, что . При этом при поэтому

Имеет место очевидное неравенство (доказать истинность самим!) . Поэтому

т.е. в асимптотике функции и ведут себя одинаково. Первый предел в (5) доказан.

Пусть . Рассмотрим переходные вероятности

Отсюда следует, что

и последний верхний предел ограничен. Переходя к пределу получаем, что из чего следует существование второго предела (5). Так как , то деля обе части на *t* и переходя к пределу получаем равенство Теорема 1 доказана.

**Замечание 2**. Если – скачкообразный процесс в непрерывном времени с конечным/счетным множеством состояний, то для того, чтобы он был однородным и марковским необходимо, чтобы время пребывания в каждом из возможных состояний имело экспоненциальное распределение.

**Определение 4**. Пусть – однородный марковский процесс с конечным/счетным множеством состояний, и выполнены условия Теоремы 1. Тогда матрица

называется *матрицей интенсивностей переходов*. Ее внедиагональные элементы называются *интенсивностями перехода* , а модули диагональных элементов - *интенсивностями выхода* из .

**Теорема 2**. В условиях Теоремы 1матрица переходных вероятностей вероятностей удовлетворяет следующим системам дифференциальных уравнений:

с начальным условием *P(0) = I*. Каждая из систем имеет единственное решение

**Доказательство:**

Исходя из марковского свойства процесса и определения матрицы интенсивности получаем

Взятие предела при от правой и левой частей приводит к (7). Истинность (8) доказывается аналогично. Уравнения (7) и (8) являются линейными автономными, и, следовательно, имеющими единственное глобальное решение. То, что (9) и есть искомое решение проверяется непосредственной подстановкой (9) в (7) и (8). Теорема доказана.

Вектор распределения состояния марковского процесса , где также определяется системой линейных уравнений Колмогорова

**Теорема 3 (доказать самостоятельно)**. В условиях Теоремы 1 является единственным решением системы линейных дифференциальных уравнений Колмогорова

с начальным условием

Как и в случае марковских цепей, по матрице интенсивности переходов (только ее внедиагональным элементам!) как по матрице связности можно построить ориентированный нагруженный граф – *стохастический граф, соответствующий марковскому процессу* . Данный граф весьма иллюстративен для анализа поведения процесса.

**Замечание 3.** Если марковский процесс не является однородным, то матрица интенсивностей переходов зависит от времени

При этом прямое и обратное уравнения Колмогорова принимают вид

Уравнение (10) также принимает вид

Однако, в неоднородном случае уравнение (7’) описывает эволюцию матрицы переходных вероятностей при более обременительных ограничениях, чем указаны для однородного случая в Теореме 1.

**Теорема 1’**. Пусть для элементов матрицы переходных вероятностей существуют такие интенсивности , что они

1. равномерно непрерывны по *(j,k,t)*,
2. равномерно ограничены по *(j,k,t)*,
3. выполнены неравенства причем равномерно по *(j,k,t).*

Тогда матрица переходных вероятностей удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова (7’), а вектор распределения вероятностей – уравнению (10’).

**Замечание 4**. При нарушении условий 1) - 3) Теоремы 1’ система уравнений (7’) будет иметь решение, но оно не будет описывать эволюцию во времени матрицы переходной вероятности.

**Существование стационарных распределений**

Вновь рассматриваем только однородные марковские процессы. Каковы условия существования стационарного предельного распределения?

Пусть процесс стартует из точки *j,* т.е. и имеет непрерывные справа траектории. Обозначим

Пусть *E -*фазовое пространство (множество возможных значений) данного процесса.

**Теорема 4.** Пусть существует состояние такое, что

.

Тогда существуют пределы

не зависящие от .

**Теорема 5.** Если существует , и все строки матрицы *P* одинаковые, равные , то является стационарным распределением – единственным решением системы

**Моделирование марковских процессов с непрерывным временем**

Сначала представим алгоритм моделирования однородного марковского процесса. Без ограничения общности будем считать, что множество состояний процесса – конечное. Так как процесс – скачкообразный, то для его моделирования достаточно моделировать случайные моменты скачков и сами скачки.

**Шаг 1**. «Нулевой» скачок: как дискретная случайная величина со множеством значений *{1,…,N}* и распределением (Моделирование дискретных случайных величин описывалось в разделе моделирования цепей Маркова).

**Шаг 2**. Пусть в момент предыдущего скачка значение . Моделируется следующий момент скачка , где – экспоненциально распределенная случайная величина, не зависимая от прошлого. Таким образом,

**Шаг 3.** Значение процесса в момент в момент следующего скачка моделируется как дискретная случайная величина с распределением .

**Шаг 4.** *n = n+1*. Перейти к шагу 2.

**Замечание 5**. Описанный выше алгоритм позволяет моделировать однородные марковские процессы точно: смоделированные таким образом процессы являются марковскими с начальным распределением и матрицей интенсивностей переходов . При этом траектория таких процессов задана полностью.

В отличие от однородных, неоднородные процессы моделируются приближенно на некоторой временной сетке.

Пусть – неоднородный марковский скачкообразный процесс и начальным распределением и функцией матрицей интенсивностей переходов . Выберем шаг дискретизации по времени *h > 0* такой, что Построим временную сетку с шагом *h: tn = nh*, n=0,1,2,…

**Шаг 1**. *t0 = 0.* Начальное состояниемоделируется как дискретная случайная величина со множеством значений *{1,…,N}* и распределением (Моделирование дискретных случайных величин описывалось в разделе моделирования цепей Маркова).

**Шаг 2.** Пусть в момент времени *tn-1* значение . Строим распределение где – *j*-й единичный вектор в . Моделируется как дискретная случайная величина со множеством значений *{1,…,N}* и распределением .

**Шаг 3**. *n = n+1.* Перейти к шагу 2.